図の容易軸方向に平行に磁界を印加する場合

磁化を$M_s$、異方性エネルギー定数を$K_u$とし、外部磁界$H$を容易軸に対して平行
に印加する。
図のように角度$\theta$をとると、単位体積あたりのエネルギー$E$は、

$$E = M_sH\cos\theta + K_u\sin^2\theta$$

で与えられる。右辺第1項はゼemanエネルギー、第2項は異方性エネルギーである。

$$\frac{E}{2K_u} = \frac{M_sH}{2K_u}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{H}{H_k}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

となる。

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{E}{2K_u} = -\frac{H}{H_k}\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = \sin\theta(-\frac{H}{H_k} + \cos\theta) = 0$$

より、エネルギー極値が、

$$\sin\theta = 0$$

あるいは、

$$-\frac{H}{H_k} + \cos\theta = 0$$

すなわち、

$$\theta = 0, \theta = \pi$$

あるいは、
\[ \cos \theta = \frac{H}{H_k} \]

で現われる。
これらの関係を下図に示す。

- \( H / H_k = 0 \)
  三角方程より \( \theta = 0, \theta = \pi \) でエネルギー \( E/2K_u \) が極小, 三角方程より \( \cos \theta = 0, \theta = \pi/2 \) で \( E/2K_u \) が極大となる.
  そこで, 初期状態として磁化の角度を \( \theta = 0 \) とする.

- \( H / H_k = 0.5 \)
  三角方程より \( \theta = 0, \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) が極小, 三角方程より \( \cos \theta = 0.5, \theta = \pi/3 \) で \( E/2K_u \) が極大となる.
  \( \theta = 0 \) から \( \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) の極大が存在するので, \( \theta = 0 \) から \( \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) には磁化状態が遷移しないで, \( \theta = 0 \) のままでいる.

- \( H / H_k = 1.0 \)
  三角方程において, \( \theta = 0 \) では \( E/2K_u \) が極大, \( \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) が極小となり, 三角方程においては, \( \cos \theta = 1.0, \theta = 0 \) で \( E/2K_u \) が極大となる.
  したがって, \( \theta = 0 \) から \( \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) には磁化状態が遷移する.

- \( H / H_k > 1.0 \)
  三角方程において, \( \theta = 0 \) では \( E/2K_u \) が極大, \( \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) が極小となる. 一方, 三角方程は \( \cos \theta = H / H_k \) であるので, \( H / H_k > 1.0 \) では \( \theta \) は存在しない.
結局，磁化は$\theta = \pi \equiv 180$ deg のままである。

以上の結果から、$M - H$ ループを描くと以下の図となる。

□. 容易軸方向に垂直に磁界を印加する場合

次に，外部磁界$H$ を容易軸に対して垂直に印加する。
□□式の代わりに，

$$\frac{E}{2K_u} = \frac{M_s H}{2K_u} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{H}{H_k} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$$

となり，□□式の代わりに，

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{E}{2K_u} = - \frac{H}{H_k} \sin \theta - \sin \theta \cos \theta = \sin \theta \left( - \frac{H}{H_k} - \cos \theta \right) = 0$$

となる。
したがって，□□□□式，□□□□式の代わりに，

$$\theta = 0 \ , \ \theta = \pi$$
あるいは、

\[
\cos \theta = -\frac{H}{H_k}
\]

が得られる。
これらの関係を下図に示す。

\[
\frac{E}{2K_u} = \frac{M_s H \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}{H_k} = \frac{H \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta}{H_k}
\]

・ \( H/H_k = 0 \)
  もっとも \( \theta = 0, \theta = \pi \) でエネルギー \( E/2K_u \) が極大、 \( \theta = \pi/2 \) で \( E/2K_u \) が極小となる。

そこで、初期状態として磁化の角度を \( \theta = \pi/2 \) で \( 90 \) deg とする。

・ \( H/H_k = 0.5 \)
  やはり、もっとも \( \theta = 0, \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) が極大、 \( \theta = \pi/2 \) で \( E/2K_u \) が極小となる。
  \( \theta = \pi/2 \) で \( 90 \) deg であり \( \theta = 2\pi/3 \) で \( 120 \) deg の方が \( E/2K_u \) が低いので、 \( \theta = \pi/2 \) 
  \( 90 \) deg から \( \theta = 2\pi/3 \) で \( 120 \) deg に、磁化が回転する。

・ \( H/H_k = 1.0 \)
  もっとも \( \theta = 0 \) では \( E/2K_u \) が極大、 \( \theta = \pi \) で \( E/2K_u \) が極小となり、\( \theta = \pi/2 \) においては、 \( \cos \theta = -1.0 \) で \( E/2K_u \) が極小となる。
  したがって、 \( \theta = 2\pi/3 \) で \( 120 \) deg から \( \theta = \pi \) で \( 180 \) deg に、さらに磁化が回転する。
\( H / H_k > 1.0 \) \( \Rightarrow H / H_k = 1.5, \ 2.0 \)

\( \theta = 0 \) では \( E/2K_u \) が最大、\( \theta = \pi = 180 \ deg \) では \( E/2K_u \) が最小となる。一方、\( \cos \theta = H / H_k \) であるので、\( H / H_k > 1.0 \) では \( \theta \) は存在しない。

結局、磁化は \( \theta = \pi = 180 \ deg \) のままである。

\(-1.0 \leq H / H_k \leq 1.0\)，すなわち \(-H_k \leq H \leq H_k\) では\( \text{式} \)が解となる。\( M - H \)ループの縦軸は \( M \) の \( H \) 方向成分

\[ M \cos \theta \]

を測定するが、\( \text{式} \)より、

\[ M \cos \theta = -M_s \frac{H}{H_k} \]

となるので、\(-H_k \leq H \leq H_k\) では \( M - H \)ループは \( H \) に比例する。\( H = \pm H_k \) で \( M - H \)ループは飽和し、それぞれ \( \pm M_s \) に達する。

以上の結果から、\( M - H \)ループを描くと以下の図となる。